理系第２問

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P，Q，R はそれぞれ辺 AB，AD，CD 上にあり，3 点 A，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ 三角形の 3 頂点であるとする。$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

AP$=p$, AQ$=q$, DC$=r$ とおく。

$\triangle$APQ$=\dfrac{1}{3}$ より $pq=\dfrac{2}{3}\cdots$①

台形 PBCR$+\triangle$DQR$=\dfrac{1}{3}$ より $qr+p=\dfrac{4}{3}\cdots$②

よって $p=\dfrac{4}{3}-qr\cdots$③

このとき，$\triangle$APQ の面積条件から $\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$，$\dfrac{2}{3}\leqq q\leqq 1$

③から $r=\dfrac{1}{q}\left(\dfrac{4}{3}-p\right)$ で，一方①より $\dfrac{1}{q}=\dfrac{3}{2}p\cdots$④ だから，

$r=\dfrac{3}{2}p\left(\dfrac{4}{3}-p\right)=-\dfrac{3}{2}\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$

これと上の p の範囲から $\dfrac{1}{6}\leqq r\leqq\dfrac{2}{3}$，したがって R は確かに辺上 CD にある。

$f(p)=\dfrac{r}{q}=\dfrac{1}{q^2}\left(\dfrac{4}{3}-p\right)$ に④を用いて $t=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$

$f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^2=0$ から $p=0$，$\dfrac{8}{9}$，これと増減表（略）から，$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$ の範囲では $p=\dfrac{8}{9}$ のとき極大かつ最大で，最大値は $f\left(\dfrac{8}{9}\right)=\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$

最小値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ または $f(1)$ であるが，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$ なので，最小値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

◆コメント◆

文系第 1 問と同内容ですが，誘導がありません。しかし，ぶっちゃけ，余計な誘導がない分，こちらのほうが自然な流れに沿って解きやすいです。誘導がないのは，理系の人の手が止まることのないように，という配慮だったのかもしれません。r の範囲を求めるのは，R が辺 CD から吹っ飛ぶことはないよ，というのを示すためです (下線部)。このあたりで，微妙に点が分かれるかもしれません。