理系第５問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

(1) P の偏角を θ とし，AQ の中点を M とすると，M は接線上にあり，AM$=1-\cos\theta$ であるから，Q は $u=1+2(1-\cos\theta)z$ で表される。$\cos\theta=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ であることを用いて，$u=\boldsymbol{2z-z^2}$

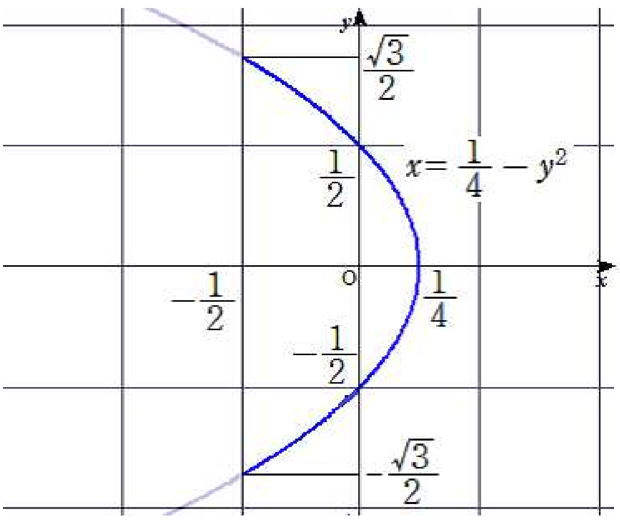
$$w=\frac{1}{1-(2z-z^2)}=\frac{1}{z\overline{z}-2z+z^2}=\frac{1}{z(\overline{z}-2+z)}$$

$$\therefore\ \overline{w}=\frac{1}{\overline{z}(z-2+\overline{z})},\quad よって\ \frac{\overline{w}}{w}=\frac{z}{\overline{z}}=\boldsymbol{z^2},$$

以上を用いて，$\dfrac{w+\overline{w}-1}{w}=1+\dfrac{\overline{w}}{w}+\dfrac{1}{w}=2z\ \therefore\ \left|\dfrac{w+\overline{w}-1}{w}\right|=\boldsymbol{2}$

(2) $w=x+yi$ とおくと，$\left|\dfrac{w+\overline{w}-1}{w}\right|=2$ から $\left|\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=2 \iff x=\dfrac{1}{4}-y^2$

ここで $w=\dfrac{1}{1-2z+z^2}=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ より $arg\,(w)=-arg\{(z-1)^2\}=-2arg\,(z-1)$ で，$z-1$ の偏角は $120^\circ\leqq arg\,(z-1)\leqq 240^\circ$ の範囲を連続的にとりうるので，w の偏角は $-480^\circ\leqq arg(w)\leqq -240^\circ \iff -120^\circ\leqq arg(w)\leqq 120^\circ$ の値をとる。よって求める軌跡は，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{4}-y^2\ \left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}\right)}$



◆コメント◆

複素数平面に慣れていない人が多いことを考えると，最高難度に属する問題です。計算ルートがいろいろ思いつくだけに，試行錯誤に時間をとられます。それだけ，計算や式に対する感覚を養う勉強になります。複素数平面特有の計算は案外たくさんあるので，基本問題から積み上げて練習していくといいでしょう。