

理系第1問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、 $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

$$f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x}, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

分子 $g(x) = \sin x - x \cos x - \sin^3 x$ について、

(i) $x \geq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos x < 0$, $1 > \sin x > \sin^3 x$ なので $g(x) > 0$

(ii) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $g(x) = \sin x (1 - \sin^2 x) - x \cos x = \cos x (\sin x \cos x - x)$

ここで、 $0 < \cos x < 1$, $x > \sin x > \sin x \cos x$ だから $g(x) < 0$

よって増減表は以下のようになり、

x	...	$\frac{\pi}{2}$...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	$\frac{\pi}{2}$	\nearrow

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ より } \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) = \infty$$

◆コメント◆

数3の微分は、一見式がわかりにくいことが多いですが、少しいじってみると、意図した結果が出てきます。この問題では、増減がだいたい見えているので、その線で先入観を持って式変形していくことになります。