文系第１問

座標平面上に放物線 C を $y=x^2-3x+4$ で定め，領域 D を $y \geqq x^2-3x+4$ で定める。原点をとおる 2 直線 l，m は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件をみたす点 P$(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。
条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy \leqq 0$ がなりたつ。

(1) 接線を $y=kx$ とおいて，$x^2-3x+4=kx$ の重解条件から $k=-7,\ 1$

接線は $7x+y=0$, $x-y=0$ だから，A$(s,\ t)$ とおくと

$$L=\frac{|7s+t|}{\sqrt{1+49}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(s+2)^2 \ \left(\because t=s^2-3s+4\right),$$

$$M=\frac{|s-t|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(s-2)^2$$

(i) $s<-2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{10}}(s+2)-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}(s-2)$ で，単調減少

(ii) $-2<s<2$ のとき，同様に $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は単調減少。

(iii) $2<s$ のとき，同様に $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は単調増加

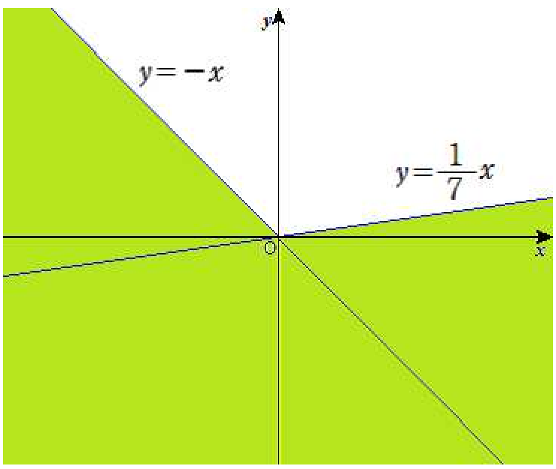
sz 平面の $z=\sqrt{L}+\sqrt{M}$ のグラフは連続した折れ線になるから，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は $s=2$ のとき最小になり，このとき **A$(2,\ 2)$**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ q)$，領域 D の点 R に対して $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(x,\ y)$ とおくと，

$px+qy \leqq 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} \leqq 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角が 90° 以上

直線 OP の傾きは -7 から 1 の間を取りうるから，求める範囲は

$y \leqq \dfrac{1}{7}$ **かつ** $y \leqq -x$



（境界を含む）

◆コメント◆

例年通り点取り問題で，簡単なのですが，こういう計算に慣れていない人にはそこそこ手応えがあったでしょう。勉強量のみで差が付く問題です。